Théorie spectrale et méthodes variationnelles
M2 ANEDP

Examen du 15 avril 2016 - Documents autorisés

NB : la notation tiendra fortement compte de la précision des arguments.

Partie I : Théorie spectrale

On note $\mathcal{H}$ l'espace de Hilbert complexe

$$\mathcal{H} := \left\{ u \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R};\mathbb{C}) \mid u \ 2\pi\text{-périodique} \right\},$$

muni du produit scalaire

$$\langle u|v \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \overline{u(x)}\, v(x)\, dx.$$

Pour $1 \leq p \leq \infty$ et $s \in \mathbb{R}$, on note

$L^p_{\mathrm{per}} := \left\{ u \in L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R};\mathbb{C}) \mid u \ 2\pi\text{-périodique} \right\}$ et $H^s_{\mathrm{per}} := \{ u \in H^s_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R};\mathbb{C}) \mid u \ 2\pi\text{-périodique} \}$.

On rappelle que les modes de Fourier $(e_k)_{k \in \mathbb{Z}}$, où

$$e_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx},$$

forment une base Hilbertienne de $\mathcal{H}$, que

$$H^s_{\mathrm{per}} = \left\{ u = \sum_{k \in \mathbb{Z}} u_k e_k \mid u_k \in \mathbb{C},\ \sum_{k \in \mathbb{Z}} (1 + |k|^2)^s |u_k|^2 < \infty \right\},$$

que $H^0_{\mathrm{per}} = L^2_{\mathrm{per}} = \mathcal{H}$ et que, pour $s > r$, l'injection canonique $H^s_{\mathrm{per}} \hookrightarrow H^r_{\mathrm{per}}$ est compacte.

Question 1. On considère l'opérateur P sur $\mathcal{H}$ de domaine $D(P) = H^1_{\mathrm{per}}$ défini par

$$\forall u \in D(P), \quad Pu = -i \frac{du}{dx}.$$

[1a.] Montrer que P est auto-adjoint sur $\mathcal{H}$.

[1b.] Caractériser l'opérateur $T := P^2$ (en particulier, préciser son domaine).

[1c.] Déterminer le spectre discret et le spectre essentiel de P. Même question pour T.

Question 2. Soit $V : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique telle que $V(x) = -1$ sur $]-\pi, 0[$, $V(x) = 1$ sur $]0, \pi[$, $V(0) = V(\pi) = 0$. On note également V l'opérateur auto-adjoint borné sur $\mathcal{H}$ défini par

$$\forall u \in \mathcal{H}, \quad (Vu)(x) = V(x)u(x) \text{ pour presque tout } x \in \mathbb{R}.$$

[2a.] Déterminer le spectre discret et le spectre essentiel de l'opérateur V.

[2b.] Montrer que V est un opérateur T-compact.

[2c.] Montrer que l'opérateur $H := T + V$, de domaine $D(H) = D(T)$, est auto-adjoint sur $\mathcal{H}$ et borné inférieurement. On admettra que son domaine de forme est $q(H) = H^1_{\rm per}$.

[2d.] Que peut-on dire sur le spectre de H ?

Question 3. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de sous-espaces vectoriels de $H^1_{\rm per}$ telle que $\mathcal{N}_n := \dim(X_n) < \infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et

$$\forall v \in H^1_{\rm per}, \quad \lim_{n\to\infty} \min_{v_n \in X_n} \|v - v_n\|_{H^1} = 0.$$

Pour $1 \leq j \leq \mathcal{N}_n$, on note $\lambda_{j,n}(H)$ la j-ième plus petite valeur propre, en tenant compte des multiplicités, du problème

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{chercher } (\lambda_n, u_n) \in \mathbb{R} \times X_n \text{ tel que} \\ \forall v_n \in X_n, \ \langle v_n | H | u_n \rangle = \lambda_n \langle v_n | u_n \rangle, \end{array} \right. \tag{1}$$

où H désigne l'opérateur introduit à la question 2c. On rappelle que

$$\lambda_{j,n}(H) = \min_{V_j \in \mathcal{V}_{j,n}} \max_{v \in V_j \setminus \{0\}} \frac{\langle v|H|v\rangle}{\langle v|v\rangle},$$

où $\mathcal{V}_{j,n}$ désigne l'ensemble des sous-espaces vectoriels de X_n de dimension j. Soit

$$\lambda_j(H) = \min_{V_j \in \mathcal{V}_n} \max_{v \in V_j \setminus \{0\}} \frac{\langle v|H|v\rangle}{\langle v|v\rangle},$$

où $\mathcal{V}_n$ désigne l'ensemble des sous-espaces vectoriels de $H^1_{\rm per}$ de dimension j.

[3a] Que peut-on dire de $\lambda_j(H)$?

[3a] On note

$$a(u, v) = \int_{-\pi}^{\pi} \overline{\frac{du}{dx}} \frac{dv}{dx} + \int_{-\pi}^{\pi} (V + 2)\overline{u}v = \langle u|H|v\rangle + 2\langle u|v\rangle.$$

Vérifier que a est un produit scalaire sur $H^1_{\rm per}$ définissant une norme équivalente à la norme

$$\|u\|_{H^1_{\rm per}} = \left(\int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{du}{dx} \right|^2 + |u|^2 \right).$$

On note Π_n le projecteur orthogonal de $H^1_{\rm per}$ sur X_n pour le produit scalaire a.

[3c] Soit $W_j := \mathrm{Ran}(P^H_{\lambda_j(H)})$, où $(P^H_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ est la famille spectrale associée à l'opérateur auto-adjoint H. Montrer que pour n assez grand,

$$\lambda_{j,n}(H)+2 \leq \max_{v \in \Pi_n W_j \setminus \{0\}} \frac{a(v,v)}{\langle v|v\rangle} = \max_{v \in W_j \setminus \{0\}} \frac{a(\Pi_n v, \Pi_n v)}{\langle \Pi_n v|\Pi_n v\rangle} \leq \max_{v \in W_j \setminus \{0\}} \frac{a(v,v)}{\langle \Pi_n v|\Pi_n v\rangle} \leq (\lambda_j(H)+2) \max_{v \in W_j \setminus \{0\}} \frac{\langle v|v\rangle}{\langle \Pi_n v|\Pi_n v\rangle}.$$

[3d] En déduire que la suite $(\lambda_{j,n})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante qui converge vers $\lambda_j(H)$ lorsque n tend vers l'infini.

Question 4 : défaut d'approximation et pollution spectrale.

[4a] Pour $n \in \mathbb{N}$, on note

$$Y_n = \mathbb{C}e_{0,n} \oplus \mathrm{Vect}(e_k,\ 1 \leq |k| \leq n-1) \oplus \mathbb{C}e'_n,$$

où

$$e_{0,n} = \cos\left(\frac{1}{n}\right) e_0 + \sin\left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}e_n + \frac{1}{\sqrt{2}}e_{-n}\right), \quad e'_n = \frac{1}{\sqrt{2}}e_n + \frac{1}{\sqrt{2}}e_{-n}.$$

Calculer explicitement les valeurs propres du problème

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{chercher } (\lambda_n, u_n) \in \mathbb{R} \times Y_n \text{ tel que} \\ \forall v_n \in Y_n,\ \langle v_n|P|u_n\rangle = \lambda_n \langle v_n|u_n\rangle. \end{array} \right.$$

Que se passe-t-il lorsque n tend vers l'infini ? Comparer avec les résultats obtenus à la question 1c et à la question 3 et commenter.

[4a] Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $Z_n = \mathrm{Vect}(e_k,\ -n \leq k \leq n)$. Soit V l'opérateur introduit à la question 2. On note $\lambda_{1,n}(V) \leq \lambda_{1,n}(V) \leq \cdots \leq \lambda_{2n+1,n}(V)$ les valeurs propres du problème

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{chercher } (\lambda_n, u_n) \in \mathbb{R} \times Z_n \text{ tel que} \\ \forall v_n \in Z_n,\ \langle v_n|V|u_n\rangle = \lambda_n \langle v_n|u_n\rangle, \end{array} \right.$$

comptées avec leurs multiplicités. Montrer que pour tout $1 \leq j \leq 2n+1$, $\lambda_{j,n}(V) = -\lambda_{2n+1-j,n}(V)$ et en déduire que $\lambda_{n+1,n}(V) = 0$. Comparer avec le résultat obtenu aux questions 2a et 3 et commenter.

Partie II : Méthodes variationnelles

Dans cette partie, toutes les fonctions considérées sont à valeurs rélles. Soit $\Omega = (0,1)^d$ ($d = 1$, 2 ou 3) et $V \in L^2(\Omega)$. On considère le problème de minimisation

$$I = \inf\left\{E(v),\ v \in H^1_0(\Omega),\ \int_\Omega v^2 = 1\right\} \tag{2}$$

où

$$E(v) = \int_\Omega |\nabla v|^2 + \int_\Omega V|v|^2 + \frac{1}{2}\int_\Omega |v|^4.$$

Question 1. Montrer que (2) admet un miniminiseur u vérifiant $u \geq 0$ sur Ω et qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$-\frac{1}{2}\Delta u + Vu + \mu u^3 = \lambda u.$$

On admettra que u est dans $H^2(\Omega)$ et que $u > 0$ sur Ω (ces résultats découlent de propriétés de régularité elliptique et de l'inégalité de Harnack).

Question 2. Montrer que les deux seuls minimiseurs de (2) sont u et $-u$.

Question 3. Soit $(X_h)_{h>0}$ une famille de sous-espaces vectoriels de dimension finie de $H_0^1(\Omega)$ telle que

$$\min \left\{ \|u - v_h\|_{H^1},\ v_h \in X_h \right\} \underset{h \to 0^+}{\longrightarrow} 0 \tag{3}$$

On considère l'approximation variationnelle de (2) dans X_h définie par

$$I_h = \inf \left\{ E(v_h),\ v_h \in X_h,\ \int_\Omega v_h^2 = 1 \right\}. \tag{4}$$

Vérifier que le problème (4) admet au moins un minimiseur u_h tel que $(u_h, u)_{L^2} \geq 0$. Ecrire l'équation d'Euler-Lagrange vérifiée par u_h. On notera λ_h le multiplicateur de Lagrange de la contrainte $\int_\Omega v_h^2 = 1$.

Question 4. Soit $W \in L^2(\Omega)$ et H l'opérateur auto-adjoint sur $L^2(\Omega)$ de domaine $D(H) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ défini pour tout $v \in D(H)$ par

$$Hv = -\Delta v + Wv.$$

On rappelle que la plus petite valeur propre de H, notée μ_1, est simple et posséde un vecteur propre associé w_1 tel que $\|w_1\|_{L^2} = 1$ et $w_1 > 0$ sur Ω.

[4a.] Montrer qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \quad 0 \leq \langle (H - \mu_1)v, v \rangle_{H^{-1}, H_0^1} \leq M \|v\|_{H^1}^2. \tag{5}$$

[4b.] Montrer qu'il existe une constante $C \in \mathbb{R}_+$ telle que

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \quad \langle (H - \mu_1)v, v \rangle_{H^{-1}, H_0^1} \geq \frac{1}{2} \|v\|_{H^1}^2 - C \|v\|_{L^2}^2. \tag{6}$$

[4c.] Montrer que

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \quad \langle (H - \mu_1)v, v \rangle_{H^{-1}, H_0^1} \geq \alpha \left(\|v\|_{L^2}^2 - |(w_1, v)_{L^2}|^2 \right),$$

où α est une constante strictement positive (indépendante de v) que l'on exprimera en fonction des valeurs propres de H.

[4d.] Montrer que pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$ tel que $\|v\|_{L^2} = 1$ et $(w_1, v)_{L^2} \geq 0$,

$$1 - |(w_1, v)_{L^2}|^2 \geq \beta \|w_1 - v\|_{L^2}^2,$$

où β est une constante strictement positive (indépendante de v) que l'on précisera.

[4e.] Déduire des questions précédentes qu'il existe une constante $\gamma > 0$ telle que pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$ vérifiant $\|v\|_{L^2} = 1$ et $(w_1, v)_{L^2} \geq 0$

$$\gamma \|v - w_1\|_{H^1}^2 \leq \langle (H - \mu_1)(v - w_1), (v - w_1) \rangle_{H^{-1}, H_0^1}. \tag{7}$$

Question 5. On note $E''(u)$ la différentielle seconde de E au point u.

[5a.] Montrer que

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \quad E''(u)(v, v) = 2 \langle (-\Delta + W)v, v \rangle_{H^{-1}, H_0^1} + \zeta \int_\Omega u^2 v^2,$$

où W est une fonction et ζ un réel que l'on précisera.

[5b.] Montrer que

$$\forall v \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}\,, \quad \langle (\frac{1}{2}E''(u) - \lambda)v, v\rangle_{H^{-1},H_0^1} > 0.$$

En déduire, en raisonnant par l'absurde et en utilisant les résultats de la question 4, qu'il existe des constantes $0 < \eta \leq M < \infty$ telle que pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$,

$$\eta \|v\|_{H^1}^2 \leq \langle (\frac{1}{2}E''(u) - \lambda)v, v\rangle_{H^{-1},H_0^1} \leq M\|v\|_{H^1}^2. \tag{8}$$

Question 6. On rappelle que u désigne l'unique minimiseur positif de (2) et que u_h un minimiseur de (4) vérifiant $(u_h, u)_{L^2} \geq 0$. On note $H_u = -\Delta + V + u^2$.

[6a.] Montrer que

$$E(u_h) - E(u) = \langle (H_u - \lambda)(u_h - u), (u_h - u)\rangle_{H^{-1},H_0^1} + \frac{1}{2}\int_\Omega (u_h^2 - u^2)^2.$$

[6b.] En déduire que

$$E(u_h) - E(u) \geq \alpha \|u_h - u\|_{H^1}^2,$$

pour une constante $\alpha > 0$ indépendante de h.

[6c.] Soit Π_h le projecteur orthogonal de $L^2(\Omega)$ sur X_h. Montrer que pour h suffisamment petit $\|\Pi_h u\|_{L^2} > 0$ et que $\widetilde{u}_h = \Pi_h u / \|\Pi_h u\|_{L^2}$ vérifie

$$\widetilde{u}_h \in X_h, \quad \|\widetilde{u}_h\|_{L^2} = 1, \quad \lim_{h\to 0} \|u - \widetilde{u}_h\|_{H^1} = 0.$$

[6d.] En déduire que

$$\lim_{h\to 0} \|u - u_h\|_{H^1} = 0.$$

Question 7. Montrer que

$$\lambda_h - \lambda = \langle (H_u - \lambda)(u_h - u), (u_h - u)\rangle_{H^{-1},H_0^1} + \int_\Omega w_{u,u_h}(u_h - u) \tag{9}$$

où w_{u,u_h} est une fonction dépendant de u et de u_h que l'on précisera. Montrer que

$$|w_{u,u_h}| \leq C(1 + |u_h|^3),$$

pour une certaine constante C indépendante de h, et en déduire que pour tout $h > 0$ suffisamment petit

$$|\lambda_h - \lambda| \leq C\left(\|u_h - u\|_{H^1}^2 + \|u_h - u\|_{L^2}\right), \tag{10}$$

où C désigne une constante indépendante de h.