**TD, M2 ANEDP (2016-17)**

**Le Laplacien de Robin sur un domaine borné**

(Éric Cancès & Mathieu Lewin)

Mars 2017

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert borné connexe, dont la frontière est une sous-variété de dimension $d-1$, de classe $C^2$. On rappelle que pour tout $\theta \in [0,1[$, le *Laplacien de Robin* est l'opérateur $A_\theta$ défini sur $L^2(\Omega)$ par

$$(A_\theta f)(x) = -\Delta f$$

sur le domaine

$$\mathcal{D}_\theta = \left\{ f \in H^2(\Omega) \ : \ \cos(\pi\theta) f_{|\partial\Omega} + \sin(\pi\theta)\partial_n f_{|\partial\Omega} = 0 \right\}$$

où $f_{|\partial\Omega} \in H^{3/2}(\partial\Omega)$ et $\partial_n f_{|\partial\Omega} \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ sont respectivement la restriction et la dérivée normale au bord de $\Omega$. Lorsque $\theta = 0$ on retrouve la condition de Dirichlet alors que pour $\theta = 1/2$ on trouve la condition de Neumann.

Dans le cours nous avons vu que $A_\theta$ est un opérateur auto-adjoint sur son domaine $\mathcal{D}_\theta$ et que son spectre est minoré. Par ailleurs, $A_\theta$ est à résolvante compacte, ce qui implique que son spectre est constituté de valeurs propres isolées de multiplicité finie, qui tendent vers $+\infty$. Nous noterons ces valeurs propres $\lambda_1(\theta) \leqslant \lambda_2(\theta) \leqslant \cdots$ (comptées ici avec multiplicité).

La forme quadratique associée à $A_\theta$ est

$$q_\theta(f) := \begin{cases} \displaystyle\int_\Omega |\nabla f(x)|^2\,dx + \frac{1}{\tan(\pi\theta)} \int_{\partial\Omega} |f|^2 & \text{pour } \theta \in ]0,1[\setminus\{1/2\}, \\ \displaystyle\int_\Omega |\nabla f(x)|^2\,dx & \text{pour } \theta = 0 \text{ et } \theta = 1/2, \end{cases}$$

et elle est définie sur le domaine

$$\mathcal{Q}_\theta = \begin{cases} H^1(\Omega) & \text{pour } \theta \in ]0,1[, \\ H^1_0(\Omega) & \text{pour } \theta = 0. \end{cases}$$

qui contient le domaine $\mathcal{D}_\theta$. On peut exprimer les valeurs propres à partir de $q_\theta$ par le min-max de Courant-Fischer. Par exemple, on a

$$\lambda_1(\theta) = \min_{\substack{f \in \mathcal{Q}_\theta \\ \int_\Omega |f|^2 = 1}} q_\theta(f).$$

## ***Partie 1. Propriétés de*** $\lambda_1(\theta)$.

**Question 1-a.** Montrer que $\theta \mapsto \lambda_1(\theta)$ est continue et strictement décroissante.

**Question 1-b.** Montrer que $\lambda_1(1/2) = 0$ et en déduire que $\lambda_1(\theta) > 0$ pour tout $\theta \in [0,1/2[$, et que $\lambda_1(\theta) < 0$ pour tout $\theta \in ]1/2,1[$. Énoncer une inégalité de Poincaré pour la forme quadratique de Robin lorsque $\theta \in [0,1/2[$.

**Question 1-c.** Montrer que $\lambda_1(\theta) \to -\infty$ quand $\theta \to 1^-$.

**Question 1-d.** Que dire de $\lambda_k(\theta)$ ? Pour ce qui concerne la limite quand $\theta \to 1^-$, on distinguera le cas de la dimension 1 où $\partial\Omega$ est constitué de juste deux points, du cas de la dimension $d \geqslant 2$ où $\partial\Omega$ est une variété lisse.

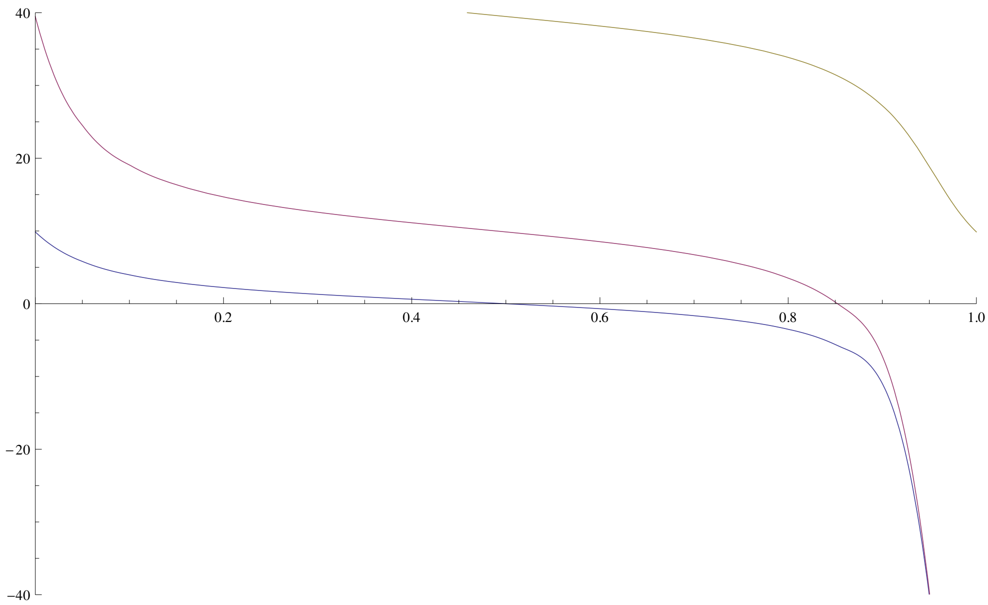


FIGURE 1 – Les trois valeurs propres $\lambda_i(\theta)$ pour $i = 1, 2, 3$ dans le cas d'un intervalle $\Omega = ]0, 1[$.

**Question 1-e.** On se place en dimension 1 sur l'intervalle $\Omega = ]0, 1[$. Montrer que $\omega^2 \neq 0$ est une valeur propre du Laplacien de Robin $A_\theta$ (de fonction propre $\alpha e^{i\omega x} + \beta e^{-i\omega x}$ avec $\alpha, \beta$ bien choisis) si et seulement si

$$\Big(\cos(\pi\theta) + i\omega \sin(\pi\theta)\Big)^2 e^{i\omega} = \Big(\cos(\pi\theta) - i\omega \sin(\pi\theta)\Big)^2 e^{-i\omega}.$$

Montrer que 0 est une valeur propre uniquement pour $\theta = 1/2$ et pour $\theta = 1 - \pi^{-1} \arctan(1/2) \simeq 0,85$. Que se passe-t-il quand $\theta \to 1^-$ ? La courbe de la figure 1 représente les trois premières valeurs propres en fonction de $\theta$.

### *Partie 2. Non dégénérescence de $\lambda_1(\theta)$.*

Dans cette partie on montre le théorème suivant :

**Théorème 1** (Perron-Frobenius)**.** *La première valeur propre du Laplacien de Robin sur un domaine borné connexe $\Omega$ est toujours simple, et sa fonction propre associée peut être choisie strictement positive à l'intérieur de $\Omega$.*

**Question 2-a.** Montrer que $\lambda_1(1/2) = \lambda_2(1/2) = 0$ si $\Omega$ a deux composantes connexes, d'où l'importance de la condition que $\Omega$ est connexe.

**Question 2-b.** Pour tout $f, g \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$ montrer que

$$|\nabla f(x)|^2 + |\nabla g(x)|^2 \geqslant \left|\nabla \sqrt{f^2 + g^2}(x)\right|^2. \tag{1}$$

Si $f^2 + g^2 > 0$ sur $\Omega$, montrer qu'on a égalité dans (1) pour tout $x \in \Omega$, si et seulement si $f = a\sqrt{f^2 + g^2}$ et $g(x) = b\sqrt{f^2 + g^2}$, pour des constantes $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a^2 + b^2 = 1$. Ce résultat s'étend à $f, g \in H^1(\Omega)$ mais nous l'admettrons dans ce cas (voir [1]).

**Question 2-c.** Montrer que $q_\theta(f) \geqslant q_\theta(|f|)$ et en déduire que $A_\theta$ admet au moins un vecteur propre réel positif $f \in \mathcal{D}_\theta$ non nul, vérifiant $-\Delta f = \lambda_1(\theta) f$ dans $H^2(\Omega)$.

**Question 2-d.** Montrer que $f$ est $C^\infty$ à l'intérieur de $\Omega$.

**Question 2-e.** Montrer que $f > 0$. On pourra utiliser l'inégalité de Harnack.

**Théorème 2** (Inégalité de Harnack [1, Chap. 9])**.** *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert connexe et $u \in H^2(\Omega)$ une fonction positive ou nulle sur $\Omega$, qui vérifie l'inégalité*

$$-\Delta u + au \geqslant 0$$

*presque partout sur $\Omega$ avec $a \in \mathbb{R}$. Alors, pour tout $r > 0$ et tout $x \in \Omega$ situé à une distance au moins $r$ de $\partial\Omega$, on a*

$$u(x) \geqslant \frac{c(r,a)}{|B_r|} \int_{B_r(x)} u(y)\, dy, \qquad \textit{presque partout.} \tag{2}$$

*Ici $c(r,a)$ est une constante strictement positive qui ne dépend que de $r$, $a$ et de la dimension $d \geqslant 1$, alors que $B_r(x)$ est la boule de rayon $r$ centrée en $x \in \mathbb{R}^d$.*

**Question 2-f.** En utilisant la question 2-b, montrer qu'il n'y a pas d'autre fonction propre associée à la valeur propre $\lambda_1(\theta)$, c'est-à-dire que $\lambda_1(\theta)$ est de multiplicité 1 ou, dit encore autrement, que $\lambda_1(\theta) < \lambda_2(\theta)$.

**Question 2-g.** Montrer que si $0 \leqslant g \in \mathcal{D}_\theta$ non nulle vérifie $-\Delta g = \mu g$, alors $\mu = \lambda_1(\theta)$ et $g = cf$.

**Question 2-h.** Montrer que $\theta \mapsto \lambda_1(\theta)$ est $C^1$. Que vaut $\lambda_1'(\theta)$ ?

## Références

[1] E. H. Lieb and M. Loss, *Analysis*, vol. 14 of Graduate Studies in Mathematics, American Mathematical Society, Providence, RI, 2nd ed., 2001.