

# Sur l'effondrement dynamique des étoiles quantiques pseudo-relativistes\*

Mathieu LEWIN

CNRS & Université de Cergy-Pontoise (UMR 8088), 95000 Cergy-Pontoise, France.

`mathieu.lewin@math.cnrs.fr`

## Résumé

Dans cet exposé, je présente plusieurs modèles quantiques non linéaires permettant de décrire certaines étoiles. Je m'intéresse tout particulièrement à l'effondrement gravitationnel des étoiles trop lourdes, un phénomène modélisé par des solutions qui explosent en temps fini. Je montre l'existence de telles solutions et je décris plusieurs de leurs propriétés au temps d'explosion.

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Masse critique pour l'équation (1)</b>	<b>3</b>
1.1	Existence locale, conservation de la masse et de l'énergie . . . . .	3
1.2	Définition de la masse critique . . . . .	4
1.3	Comportement des solutions à masse sous-critique . . . . .	6
1.4	Existence de solutions à masse surcritique s'effondrant en temps fini	6
1.5	Lien avec l'équation de Schrödinger à $N$ corps . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Formation de singularités pour l'équation (1)</b>	<b>8</b>
2.1	Deux résultats non perturbatifs . . . . .	8
2.2	Éléments de preuve . . . . .	10
<b>3</b>	<b>Autres modèles : étoiles fermioniques</b>	<b>13</b>
3.1	Modèle Hartree-Fock . . . . .	13
3.2	Modèle Hartree-Fock-Bogoliubov . . . . .	17

Si les succès de la mécanique quantique pour décrire la matière à l'échelle microscopique sont bien connus, même du grand public, son influence à l'échelle macroscopique est sans doute moins appréciée. Pourtant, en 1931, soit quelques années seulement après l'invention du formalisme quantique, Chandrasekhar [10, 9] a pu expliquer la stabilité et l'instabilité des étoiles en fin de vie, essentiellement grâce au principe d'exclusion de Pauli (une caractéristique de particules quantiques appelées fermions). Ces travaux lui ont valu un prix Nobel en 1983, partagé avec William Fowler.

Quand les sources d'énergie sont épuisées, toute étoile finit par s'effondrer sur elle-même à cause de l'attraction gravitationnelle. Son avenir dépend alors de façon déterminante de sa masse totale. Si celle-ci est suffisamment faible (de l'ordre de quelques masses solaires), elle se transforme en une naine blanche ou une étoile à

---

\*Séminaire Laurent Schwartz "EDP et applications", donné le mardi 5 Avril 2011 à l'École Polytechnique.

neutrons. Dans ces deux types d'étoiles, la densité de particules est si forte que les effets quantiques deviennent déterminants à l'échelle macroscopique. La stabilité du système est alors assurée par une pression de dégénérescence luttant contre la gravitation, elle-même conséquence du principe de Pauli. Par contre, si l'étoile est trop lourde, elle s'effondre complètement en formant un trou noir, les effets gravitationnels étant trop forts.

Dans cet exposé, je présente plusieurs résultats concernant le comportement des solutions de certaines équations aux dérivées partielles, qui décrivent l'évolution de telles étoiles. L'équation la plus simple, et qui occupera la majorité de cet article, est celle-ci :

$$\begin{cases} i \frac{\partial}{\partial t} u = \sqrt{-\Delta + m^2} u - \kappa (|x|^{-1} * |u|^2) u, \\ u(0, x) = u_0(x) \in H^{1/2}(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}), \end{cases} \quad (1)$$

avec  $(t, x) \in [0, T) \times \mathbb{R}^3$ . Dans cette équation,  $m \geq 0$  est la masse de chacune des particules composant l'étoile et la fonction  $x \mapsto u(t, x)$  décrit l'état de toutes ces particules. Plus précisément, la quantité  $|u(t, x)|^2$  est la densité de particules au temps  $t$ , de sorte que

$$\int_{\mathbb{R}^3} |u(t, x)|^2 dx$$

est le nombre total de particules dans le système (celui-ci est conservé au cours du temps, comme nous le verrons plus loin). La quantité  $|\hat{u}(t, p)|^2$  est la densité pour les particules d'avoir un moment  $p \in \mathbb{R}^3$ , de sorte que

$$\int_{\mathbb{R}^3} \sqrt{|p|^2 + m^2} |\hat{u}(t, p)|^2 dp = \int_{\mathbb{R}^3} \overline{u(t, x)} \sqrt{-\Delta + m^2} u(t, x) dx$$

est l'énergie cinétique relativiste totale du système (la vitesse de la lumière  $c$  est normalisée à  $c = 1$ ). Ici,  $\hat{u}(t, \cdot)$  désigne la transformée de Fourier de la fonction  $x \mapsto u(t, x)$ , définie par

$$\hat{u}(t, p) = (2\pi)^{-3/2} \int_{\mathbb{R}^3} u(t, x) e^{-ip \cdot x} dx.$$

L'opérateur  $\sqrt{-\Delta + m^2}$  est donc défini à l'aide de son symbole  $\sqrt{|p|^2 + m^2}$  dans le domaine de Fourier. Cet opérateur pseudo-différentiel d'ordre 1 est non local, et il est utilisé en tant que caricature de l'opérateur de Dirac [13]. Ce dernier devrait être employé afin de décrire les effets relativistes, mais l'étude des modèles correspondants est pour l'instant trop difficile pour permettre l'obtention de résultats rigoureux. Finalement,  $*$  désigne dans (1) la convolution habituelle des fonctions sur  $\mathbb{R}^3$ ,

$$|x|^{-1} * |u|^2 = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|u(y)|^2}{|\cdot - y|} dy,$$

et  $\kappa > 0$  est une constante physique qui détermine l'intensité de l'interaction gravitationnelle entre les particules. Par un simple argument de changement d'échelle, on peut choisir un système d'unités pour lequel on a

$$\kappa = 1,$$

ce que nous supposerons dans toute la suite de l'exposé. Toutefois, nous devons réintroduire la constante  $\kappa$  un peu plus tard à la section 3, lorsque nous présenterons d'autres modèles.

L'équation (1) décrit l'évolution d'étoiles composées uniquement de bosons. Celles-ci ont une masse critique bien inférieure à celles des étoiles composées de

fermions comme les naines blanches ou les étoiles à neutrons, à cause de l'absence du principe de Pauli. En fait, de tels objets ne sont stables que s'ils ont une masse qui est au plus de l'ordre de celle d'une montagne [40, 27], et ils n'ont jamais été observés par les astrophysiciens. Cependant l'équation (1) est un bon point de départ pour un mathématicien et de nombreux résultats valables pour (1) peuvent être étendus aux modèles physiquement plus raisonnables, comme nous le verrons à la section 3.

Dans la section suivante j'explique comment une masse critique apparaît naturellement pour l'équation (1), suivant Lieb et Yau [28], puis je présente un résultat d'existence de solutions à masse surcritique s'effondrant en temps fini, dû à Fröhlich et Lenzmann [16]. À la section 2, je décris en détails un résultat récent obtenu en collaboration avec Lenzmann [25], concernant le comportement des solutions au temps d'explosion. Puis, dans la section 3, je présente divers modèles pour les étoiles composées de fermions et je discute l'extension des résultats pour (1) à ces systèmes (collaboration avec Hainzl, Lenzmann et Schlein [18]).

**Subvention.** Les travaux de recherche présentés dans cet exposé ont été partiellement subventionnés par le projet MNIQS de l'*European Research Council* (FP7/2007–2013 Grant Agreement no. 258023).

## 1 Masse critique pour l'équation (1)

Dans cette première section, je présente plusieurs des résultats connus concernant l'équation (1), dont la plupart sont dus à Lieb et Yau [28] dans le cas stationnaire, et Fröhlich et Lenzmann [23, 17] pour le cas dépendant du temps. Nous verrons que l'équation (1) possède une *masse critique* au delà de laquelle le système peut devenir instable.

### 1.1 Existence locale, conservation de la masse et de l'énergie

Avant de définir la masse critique de l'étoile, et d'étudier le comportement des solutions ayant une masse trop élevée, commençons par discuter de l'existence et de l'unicité d'une solution locale à (1), pour toute condition initiale  $u_0 \in H^{1/2}(\mathbb{R}^3)$ . Le résultat est le suivant.

**Théorème 1 (Existence locale [23])** *Soit  $u_0 \in H^{1/2}(\mathbb{R}^3)$ . L'équation (1) admet une unique solution maximale*

$$u(t) \in C^0([0, T], H^{1/2}(\mathbb{R}^3)) \cap C^1([0, T], H^{-1/2}(\mathbb{R}^3))$$

avec  $0 < T \leq +\infty$ . De plus, si  $T < +\infty$ , alors

$$\lim_{t \rightarrow T^-} \|u(t)\|_{H^{1/2}(\mathbb{R}^3)} = +\infty.$$

La preuve de ce résultat utilise le fait que le terme non linéaire apparaissant dans l'équation est une convolution. Plus précisément, dans [23], Lenzmann démontre que l'application

$$F : u \in H^{1/2}(\mathbb{R}^3) \mapsto (|x|^{-1} * |u|^2)u \in H^{1/2}(\mathbb{R}^3) \quad (2)$$

est localement Lipschitz. L'existence locale suit ensuite facilement de la formule de Duhamel et d'un simple argument de point fixe. La preuve de (2) repose en partie sur l'inégalité de Kato [22, 20]

$$\frac{1}{|x|} \leq \frac{\pi}{2} \sqrt{-\Delta} \quad (3)$$

dont nous aurons besoin plus loin dans l'exposé. Cette inégalité implique par exemple que

$$\| |x|^{-1} * |u|^2 \|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} = \sup_{x \in \mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|u(y)|^2}{|x-y|} dy \leq \frac{\pi}{2} \langle u, \sqrt{-\Delta} u \rangle,$$

c'est-à-dire que  $F(u) \in L^2(\mathbb{R}^3)$ . De même, on peut facilement montrer que  $F$  est Lipschitz de  $H^{1/2}(\mathbb{R}^3)$  dans  $L^2(\mathbb{R}^3)$ . Pour obtenir cette propriété dans  $H^{1/2}(\mathbb{R}^3)$ , il faut en plus faire appel à une règle de Leibniz fractionnaire [23].

Une fois l'existence et l'unicité des solutions maximales vérifiées, on remarque ensuite que plusieurs quantités importantes sont conservées au cours du temps (car (1) est un système Hamiltonien). En particulier, on voit que le nombre total de particules dans le système

$$M[u] := \int_{\mathbb{R}^3} |u(x)|^2 dx$$

et l'énergie totale

$$\mathcal{E}_m[u] := \int_{\mathbb{R}^3} \overline{u(x)} \sqrt{-\Delta + m^2} u(x) dx - \frac{1}{2} \iint \frac{|u(x)|^2 |u(y)|^2}{|x-y|} dx dy \quad (4)$$

sont conservés :

$$M[u(t)] = M[u_0], \quad \mathcal{E}_m[u(t)] = \mathcal{E}_m[u_0], \quad \forall t \in [0, T].$$

Le fait que la norme  $L^2$  de la solution soit conservée implique que si  $T < +\infty$ , alors c'est la norme  $\|(-\Delta)^{1/4} u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}$  qui doit exploser. Maintenant, il est naturel de se demander si l'énergie  $\mathcal{E}_m$  contrôle cette norme et évite ainsi l'explosion. Nous allons voir que c'est bien le cas, à condition que  $M[u_0]$  ne soit pas trop grand.

## 1.2 Définition de la masse critique

Il est facile de voir en utilisant l'inégalité de Kato (3) que l'énergie  $\mathcal{E}_m$  introduite à l'équation (4) est bien définie et continue sur  $H^{1/2}(\mathbb{R}^3)$ . Suivant Lieb et Yau [28], nous introduisons maintenant le problème de minimisation

$$E_m(\lambda) := \inf_{\substack{u \in H^{1/2}(\mathbb{R}^3) \\ \int_{\mathbb{R}^3} |u|^2 = \lambda}} \mathcal{E}_m[u]. \quad (5)$$

On a bien sûr *a priori*  $E_m(\lambda) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$  et on se demande à quelle condition sur  $\lambda$  on a  $E_m(\lambda) > -\infty$ . Le résultat suivant fournit l'existence d'une masse critique en dessous de laquelle l'énergie est minorée, et au dessus de laquelle elle ne l'est pas. Cette masse critique va jouer un rôle primordial dans la suite<sup>1</sup>.

**Lemme 1 (Masse critique)** *Il existe un réel  $4/\pi \leq \lambda_c < \infty$ , indépendant de  $m \geq 0$ , tel que*

$$E_m(\lambda) \begin{cases} \geq 0 & \text{pour } \lambda \leq \lambda_c, \\ = -\infty & \text{pour } \lambda > \lambda_c. \end{cases}$$

*Preuve.* Il est facile de voir que  $\lambda \mapsto E_m(\lambda)$  est décroissante, ce qui montre que si  $E_m(\lambda) = -\infty$ , alors  $E_m(\lambda') = -\infty$  pour tout  $\lambda' \geq \lambda$  et, de la même façon, si  $E_m(\lambda) \geq 0$ , alors  $E_m(\lambda') \geq 0$  pour tout  $0 \leq \lambda' \leq \lambda$ . D'autre part, on a  $\sqrt{|k|^2} \leq$

1. La masse critique de l'étoile est  $m\lambda_c$ , alors que  $\lambda_c$  est le nombre critique de particules que peut comporter l'étoile bosonique tout restant stable. Souvent nous ferons l'abus d'appeler  $\lambda_c$  la "masse critique".

$\sqrt{|k|^2 + m^2} \leq \sqrt{|k|^2} + m$  qui fournit l'inégalité  $\sqrt{-\Delta} \leq \sqrt{-\Delta + m^2} \leq \sqrt{-\Delta} + m$  au sens des opérateurs, et donc la comparaison

$$E_0(\lambda) \leq E_m(\lambda) \leq E_0(\lambda) + m\lambda.$$

Ainsi il suffit bien de montrer le résultat pour  $m = 0$ . Or dans ce cas on a  $\mathcal{E}_0[t^{3/2}u(\cdot)] = t\mathcal{E}_0[u]$ , pour tout  $t > 0$ . On voit donc en faisant tendre  $t$  vers 0 et vers  $+\infty$  que  $E_0(\lambda)$  est soit nul, soit égal à  $-\infty$ . Maintenant, l'inégalité de Kato (3) nous montre que

$$\iint \frac{|u(x)|^2 |u(y)|^2}{|x-y|} dx dy \leq \frac{\pi}{2} \left( \int_{\mathbb{R}^3} |u|^2 \right) \langle u, \sqrt{-\Delta} u \rangle,$$

de sorte qu'on a l'estimée

$$\mathcal{E}_0[u] \geq \left( 1 - \frac{\lambda\pi}{4} \right) \langle u, \sqrt{-\Delta} u \rangle,$$

et donc  $\lambda_c \geq 4/\pi$ . Pour finir, on note que pour toute fonction fixée  $u$ , avec  $\int_{\mathbb{R}^3} |u|^2 = 1$ , on a  $\mathcal{E}_0[\lambda u] \rightarrow -\infty$  quand  $\lambda \rightarrow +\infty$ , et donc  $E_0(\lambda) < 0$  pour  $\lambda$  assez grand, ce qui signifie bien que  $\lambda_c < \infty$ .  $\square$

Il est naturel de se demander si le problème  $E_m(\lambda)$  admet des minimiseurs lorsque  $\lambda \leq \lambda_c$ . Le théorème suivant répond à cette question.

**Théorème 2 (Existence de minimiseurs [28, 23, 15])** *Si  $m > 0$ , le problème de minimisation  $E_m(\lambda)$  admet un minimiseur (donc une infinité à cause de l'invariance par translations), si et seulement si  $0 \leq \lambda < \lambda_c$ . Toutes les suites minimisantes sont alors précompactes dans  $H^{1/2}(\mathbb{R}^3)$ , à translations près. Si  $m = 0$ , seul le problème de minimisation  $E_0(\lambda_c)$  admet un minimiseur. Dans tous les cas, ce minimiseur peut être choisi à symétrie radiale.*

L'existence de minimiseurs à symétrie radiale a été démontrée par Lieb et Yau dans [28] par un argument de symétrisation de Schwarz (réarrangement sphérique décroissant). La précompacité de toutes les suites minimisantes à translations près, peut être obtenue par un argument de type concentration-compacité de Lions [30, 31], adapté au cadre des espaces de Sobolev fractionnaires [25].

**Remarque 1** *La masse critique  $\lambda_c$  est aussi la meilleure constante de l'inégalité fonctionnelle suivante*

$$\iint \frac{|u(x)|^2 |u(y)|^2}{|x-y|} dx dy \leq \frac{2}{\lambda_c} \left( \int_{\mathbb{R}^3} |u(x)|^2 dx \right) \left( \int_{\mathbb{R}^3} \overline{u(x)} \sqrt{-\Delta} u(x) dx \right). \quad (6)$$

*Comme  $E_0(\lambda_c)$  admet un minimiseur radial, cette inégalité admet une fonction optimale radiale  $Q \geq 0$  (donc une infinité à cause des invariances par translations et dilatations). Dans un bon choix d'unités, la fonction  $Q$  est solution de l'équation aux dérivées partielles suivante*

$$\sqrt{-\Delta} Q - (|x|^{-1} * |Q|^2) Q + Q = 0. \quad (7)$$

*Frank et Lenzmann ont démontré [14] que toute solution positive de cette équation (donc en particulier tout minimiseur de  $E_0(\lambda_c)$ ) était nécessairement radiale à translation près et analytique, mais l'unicité est encore ouverte.*

### 1.3 Comportement des solutions à masse sous-critique

Maintenant que nous avons défini la masse critique, nous pouvons déduire que si la masse totale du système est inférieure à  $m\lambda_c$ , alors la solution maximale de (1) existe pour tout temps  $t \geq 0$ , c'est-à-dire on a  $T = +\infty$ .

**Corollaire 1 (Solutions à masse sous-critique)** *Si la condition initiale satisfait  $\int_{\mathbb{R}^3} |u_0|^2 < \lambda_c$ , alors l'unique solution maximale  $u(t)$  à l'équation (1) est définie pour tout  $t > 0$ .*

*Preuve.* Pour  $\int_{\mathbb{R}^3} |u|^2 := \lambda < \lambda_c$ , on écrit que

$$\mathcal{E}_m[u] = \frac{\lambda_c - \lambda}{\lambda_c} \left\langle u, \sqrt{-\Delta + m^2} u \right\rangle + \frac{\lambda^2}{\lambda_c^2} \mathcal{E}_m \left[ \sqrt{\frac{\lambda_c}{\lambda}} u \right] \geq \frac{\lambda_c - \lambda}{\lambda_c} \left\langle u, \sqrt{-\Delta + m^2} u \right\rangle$$

d'après le lemme 1. Ainsi  $\mathcal{E}_m[u(t)] = \mathcal{E}_m[u_0]$  contrôle la norme  $H^{1/2}(\mathbb{R}^3)$  de la solution  $u(t)$  quand  $M[u(t)] = M[u_0] < \lambda_c$ , et on doit avoir  $T = +\infty$  dans ce cas.  $\square$

Par un argument à la Cazenave-Lions [6], on peut facilement démontrer que les minimiseurs de  $E_m(\lambda)$  sont orbitalement stables. Il serait par ailleurs intéressant de mieux comprendre le comportement en temps long des solutions sous-critiques.

### 1.4 Existence de solutions à masse surcritique s'effondrant en temps fini

Le théorème suivant, dû à Fröhlich et Lenzmann [17] fournit l'existence de solutions *radiales* à masse surcritique qui s'effondrent en temps fini.

**Théorème 3 (Existence de solutions s'effondrant en temps fini [17])**

*Soient  $m \geq 0$  et  $u_0$  une fonction radiale de  $H^{1/2}(\mathbb{R}^3)$ , telle que  $xu_0 \in H^{1/2}(\mathbb{R}^3)$ . On suppose que*

$$\mathcal{E}_m[u_0] < 0 \tag{8}$$

*ce qui, d'après le lemme 1, implique  $M[u_0] > \lambda_c$ . Alors l'unique solution maximale  $u(t)$  à l'équation (1) explose en temps fini : on a  $T < +\infty$  et*

$$\lim_{t \rightarrow T^-} \left\langle u(t), \sqrt{-\Delta} u(t) \right\rangle = +\infty.$$

Notons que comme l'optimum  $Q$  correspondant à la masse critique  $\lambda_c$  est radial (remarque 1), on peut trouver pour tout  $\varepsilon > 0$  une fonction radiale  $u_0$  telle que  $\mathcal{E}_m[u_0] < 0$  et  $M[u_0] \leq \lambda_c + \varepsilon$ . Le nombre  $\lambda_c$  est donc bien la frontière entre les solutions stables et les solutions (potentiellement) instables.

La preuve de [17] est basée sur un argument astucieux de type Viriel. Fröhlich et Lenzmann introduisent l'opérateur suivant

$$B = \sum_{k=1}^3 x_k \sqrt{-\Delta + m^2} x_k. \tag{9}$$

Cet opérateur est positif et il possède la propriété remarquable que

$$-i \left[ B, \sqrt{-\Delta + m^2} \right] = x \cdot (-i\nabla) + (-i\nabla) \cdot x := A,$$

où  $[M, N] = MN - NM$  désigne le commutateur de deux opérateurs. Le lecteur a sans doute reconnu pour  $A$  la formule du générateur des dilatations. À cause des propriétés de l'énergie  $\mathcal{E}_0$  vis-à-vis des dilatations, on peut alors voir que

$$\frac{d}{dt} \langle u(t), Au(t) \rangle = \mathcal{E}_m[u(t)] - \left\langle u(t), \frac{m}{\sqrt{-\Delta + m^2}} u(t) \right\rangle \leq \mathcal{E}_m[u(t)] = \mathcal{E}_m[u_0].$$

On déduit donc que

$$\langle u(t), Au(t) \rangle \leq \mathcal{E}_m[u_0]t + \langle u_0, Au_0 \rangle.$$

Maintenant, on calcule

$$\frac{d}{dt} \langle u(t), Bu(t) \rangle = \langle u(t), Au(t) \rangle + i \left\langle u(t), \left[ B, |x|^{-1} * |u(t)|^2 \right] u(t) \right\rangle.$$

L'argument de [17] consiste alors à démontrer que l'opérateur  $[B, |x|^{-1} * |u(t)|^2]$  est borné, en utilisant le théorème de Newton et l'hypothèse que  $u_0$  (donc  $u(t)$  pour tout temps) est radiale. On trouve alors

$$\langle u(t), Bu(t) \rangle \leq \frac{\mathcal{E}_m[u_0]}{2} t^2 + at + b$$

qui implique que  $T < \infty$  lorsque  $\mathcal{E}_m[u_0] < 0$ , puisque  $\langle u(t), Bu(t) \rangle$  doit rester positif ou nul pour tout  $t \in [0, T)$ .

Malheureusement, à ce jour le théorème 3 n'a pas pu être étendu à des solutions à symétrie non radiale.

## 1.5 Lien avec l'équation de Schrödinger à $N$ corps

Avant de présenter des résultats concernant le comportement des solutions au temps d'explosion, nous faisons une courte parenthèse pour expliquer comment l'équation (1) peut être obtenue à partir d'un modèle microscopique basé sur l'équation de Schrödinger à  $N$  corps.

Nous considérons le Hamiltonien

$$H_\kappa(N) = \sum_{j=1}^N \sqrt{-\Delta_{x_j} + m^2} - \frac{\kappa}{N} \sum_{1 \leq k < \ell \leq N} \frac{1}{|x_k - x_\ell|} \quad (10)$$

agissant sur  $L^2((\mathbb{R}^3)^N)$ , et qui décrit l'évolution d'un système de  $N$  particules pseudo-relativistes, soumises à une attraction purement gravitationnelle. Dans le régime où la constante gravitationnelle est proportionnelle à  $1/N$  comme dans (10), il est naturel de penser que l'énergie fondamentale du système (c'est-à-dire le minimum du spectre de  $H_\kappa(N)$ ) sera bien décrit par des fonctions d'onde à  $N$  corps décorréliées, appelées fonctions de Hartree :

$$\Psi(x_1, \dots, x_N) = \varphi^{\otimes N}(x_1, \dots, x_N) = \varphi(x_1) \cdots \varphi(x_N), \quad \int_{\mathbb{R}^3} |\varphi|^2 = 1.$$

En fait, un calcul simple montre que l'on a pour la valeur moyenne d'une telle fonction test

$$\begin{aligned} \langle \Psi, H_\kappa(N) \Psi \rangle &= N \int_{\mathbb{R}^3} \overline{\varphi(x)} \sqrt{-\Delta + m^2} \varphi(x) dx - \frac{\kappa(N-1)}{2} \iint \frac{|\varphi(x)|^2 |\varphi(y)|^2}{|x-y|} dx dy \\ &= \frac{N}{\kappa(1-1/N)} \mathcal{E}_m \left[ \varphi \sqrt{\kappa(1-1/N)} \right]. \end{aligned}$$

Lieb et Yau ont validé l'intuition précédente en démontrant dans [28] que pour tout  $\kappa < \lambda_c$ , on a

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\inf \sigma(H_\kappa(N))}{N} = \frac{E_m(\kappa)}{\kappa}. \quad (11)$$

En particulier, ce résultat contient le fait que pour  $\kappa < \lambda_c$  fixé et  $N$  assez grand, le Hamiltonien (10) est borné inférieurement et peut donc être défini comme un

opérateur auto-adjoint par le théorème KLMN [37]. Ils ont également démontré que pour  $\kappa > \lambda_c$  fixé et  $N$  assez grand,  $H_\kappa(N)$  n'est pas borné inférieurement. Ainsi la masse critique  $\lambda_c$  est aussi une masse critique pour le problème de Schrödinger à  $N$  corps, dans la limite où  $N$  est grand et la constante devant l'interaction est  $\kappa/N$ .

L'opérateur  $H_\kappa(N)$  est invariant par translations et le minimum de son spectre n'est pas une valeur propre. Toutefois, il est possible de montrer que des suites d'états fondamentaux "approchés" pour  $H_\kappa(N)$  sont proches (en un sens relativement faible) d'états à  $N$  corps de type Hartree fabriqués à partir des minimiseurs du problème  $E_m(\kappa)$ . L'énoncé précis de ce résultat n'est pas aisé à cause de l'absence d'unicité des minimiseurs pour  $E_m(\kappa)$ .

Ces résultats concernent les minimiseurs de l'énergie  $\mathcal{E}_m$ , c'est-à-dire certaines solutions stationnaires de l'équation (1). En 2007, Elgart et Schlein [12] ont pu obtenir l'équation dépendant du temps (1) à partir de l'équation de Schrödinger à  $N$  corps

$$\begin{cases} i \frac{\partial}{\partial t} \Psi = H_\kappa(N) \Psi, \\ \Psi(0) = \Psi_0 \end{cases}$$

en prenant pour l'état initial  $\Psi_0$  une fonction de Hartree. De façon très vague, leur résultat est que le système à  $N$  corps reste proche de la variété des états de Hartree :

$$e^{-it H_\kappa(N)}(u_0)^{\otimes N} \underset{N \rightarrow \infty}{\simeq} u(t)^{\otimes N}$$

où  $u(t)$  est la solution maximale de l'équation (1), avec  $\kappa = M[u_0] < \lambda_c$ . Récemment, ce travail a été généralisé au cas d'une masse surcritique dans [35].

## 2 Formation de singularités pour l'équation (1)

### 2.1 Deux résultats non perturbatifs

Revenons maintenant à la description qualitative des solutions de l'équation (1) qui explosent en temps fini. Le théorème suivant, issu d'une collaboration [25] avec Enno Lenzmann, fournit certaines propriétés intéressantes de la solution  $u(t)$  de l'équation (1) lorsqu'elle s'effondre en temps fini  $T$ .

#### **Théorème 4 (Formation de singularités pour l'équation (1), [25])**

Soient  $m > 0$  et  $u_0 \in H^{1/2}(\mathbb{R}^3)$  telle que la solution correspondante  $u(t)$  à (1) explose en temps fini  $0 < T < +\infty$ .

(i) **Existence et unicité d'une limite faible pour  $u(t)$ .** Il existe une fonction  $u_* \in L^2(\mathbb{R}^3)$  telle que

$$u(t) \rightharpoonup u_* \text{ faiblement dans } L^2(\mathbb{R}^3) \text{ et } u(t) \rightarrow u_* \text{ fortement dans } H^{-1/2}(\mathbb{R}^3),$$

quand  $t \rightarrow T^-$ .

(ii) **Existence et unicité d'une mesure d'explosion.** Il existe une mesure de Borel positive bornée  $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^3)$  telle que

$$|u(t)|^2 \rightharpoonup \mu \text{ étroitement au sens des mesures,}$$

quand  $t \rightarrow T^-$ . On a  $\mu(\mathbb{R}^3) = \int_{\mathbb{R}^3} |u_0|^2$  et  $\mu \geq |u_*|^2$ .

(iii) **Existence d'un point de concentration.** Il existe un point  $x_* \in \mathbb{R}^3$  tel que

$$\mu(\{x_*\}) \geq \lambda_c,$$

où  $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^3)$  est la mesure de (ii).

Le théorème précédent donne certaines propriétés de la solution au temps d'explosion, sans aucune autre hypothèse sur la condition initiale  $u_0$  que celle qu'il y a bien effondrement du système en temps fini. En particulier, on ne suppose pas que  $u_0$  est proche d'une fonction bien connue, d'où l'utilisation du qualificatif « non perturbatif » dans le titre de cette section.

Bien sûr  $u(t)$  est bornée dans  $L^2(\mathbb{R}^3)$ , et possède donc des sous-suites faiblement convergentes. Le point (i) du théorème nous précise qu'il y a unicité de la limite faible, c'est-à-dire que l'on a  $u(t) \rightharpoonup u_*$  faiblement dans  $L^2(\mathbb{R}^3)$  quand  $t \rightarrow T^-$ . De la même façon, on peut montrer (voir plus bas) que la suite de mesures  $|u(t)|^2$  est tendue, et elle possède donc des sous-suites qui convergent étroitement, par le théorème de Prokhorov. Cette fois, le point (ii) nous fournit l'unicité de cette mesure limite, appelée mesure d'explosion.

La convergence étroite de  $|u(t)|^2$  implique en particulier qu'aucune masse n'est perdue à l'infini. Par contre on a forcément  $M[u_*] < M[u_0]$  (en particulier on ne peut pas avoir  $u(t) \rightarrow u_*$  fortement dans  $L^2(\mathbb{R}^3)$ ) car une partie de la masse est perdue par effondrement gravitationnel, en au moins un point  $x_*$ . En effet, le point (iii) signifie par exemple que l'on a pour tout  $x(t) \rightarrow x_*$

$$\forall r > 0, \quad \liminf_{t \rightarrow T^-} \int_{B(x(t), r)} |u(t)|^2 \geq \lambda_c$$

ou, dit autrement, que toute boule centrée en  $x(t) \rightarrow x_*$ , de rayon arbitrairement petit, finit par contenir au moins la masse critique  $\lambda_c$ . Suivant la condition initiale, il peut y avoir plusieurs points d'explosion à masse surcritique, mais leur nombre est bien sûr inférieur à  $M[u_0]/\lambda_c$ . Au temps  $T$ , toute la masse se s'est pas forcément effondrée, ce qui explique pourquoi on n'a pas forcément  $u_* = 0$ . Par exemple, si  $u_0 = u_1 + u_2$  est la somme de deux fonctions dont les supports sont loin l'un de l'autre, avec  $M[u_1] > \lambda_c$  et  $M[u_2] < \lambda_c$ , les deux systèmes vont évoluer presque indépendamment. La masse qui va s'effondrer ne dépassera donc pas de beaucoup  $M[u_1]$  à condition que les supports de  $u_1$  et  $u_2$  soient très éloignés.

Ces phénomènes sont la conséquence du fait que l'équation (1) possède une propriété physique fondamentale : la masse ne peut se *déplacer qu'avec une vitesse finie*. Ceci vient de ce que le modèle est (*pseudo-*)*relativiste* et rend la preuve du théorème 4 bien plus facile que pour d'autres équations. Intuitivement la masse dans un domaine donné ne peut varier trop vite, ce qui explique l'existence de la mesure limite  $\mu$ , et des points de concentration.

Plusieurs des conclusions du théorème 4 ne sont pas connues pour d'autres équations dans lesquelles la vitesse de propagation est infinie, comme par exemple l'équation de Schrödinger non linéaire

$$i\partial_t u = -\Delta u - |u|^{\frac{4}{d}} u \quad \text{dans } \mathbb{R}^d. \quad (12)$$

Pour cette équation, on sait [34, 36, 41, 21] que la masse se concentre fortement au moins autour d'un point  $x(t)$  mais la convergence de  $x(t)$  vers un point  $x_*$  est inconnue en toute généralité. Le cas radial a lui été résolu dans [34] et le cas de solutions avec une masse quasi-critique est traité dans [33].

Il serait très intéressant (et important d'un point de vue physique), de décrire plus précisément la partie singulière de la mesure d'explosion  $\mu$ . Dans [25], nous avons proposé la conjecture suivante.

**Conjecture 1 (sur l'effondrement des solutions de (1))** *Soit  $u(t)$  une solution de (1) qui explose en temps fini  $0 < T < +\infty$ . Soient  $u_* \in L^2(\mathbb{R}^3)$  et  $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^3)$  comme au théorème 4. Alors il existe des points  $\{x_1, \dots, x_L\} \subset \mathbb{R}^3$  avec  $1 \leq L \leq \int |u_0|^2 / \lambda_c$  tels que, quand  $t \rightarrow T^-$ ,*

$$u(t) \rightarrow u_* \text{ fortement dans } L^2 \left( \mathbb{R}^3 \setminus \bigcup_{1 \leq i \leq L} B(x_i, R) \right) \text{ pour tout } R > 0,$$

et

$$|u(t)|^2 \rightharpoonup \mu = \sum_{1 \leq i \leq L} M_i \delta_{x=x_i} + |u_*|^2 \text{ étroitement dans } \mathcal{M}(\mathbb{R}^3), \text{ avec } M_i \geq \lambda_c.$$

Une conjecture similaire a été proposée pour l'équation (12) non linéaire de Schrödinger par Merle et Raphaël dans [33]. Dans [25], nous avons pu démontrer la conjecture 1 lorsque  $u_0$  est radiale.

**Théorème 5 (Formation de singularités dans le cas radial [25])**

Si  $u_0 \in H^{1/2}(\mathbb{R}^3)$  est radiale, alors la conjecture 1 est vraie. Plus précisément, soient  $u_* \in L^2(\mathbb{R}^3)$  et  $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^3)$  comme au théorème 4.

(i) Pour tout  $R > 0$ ,

$$u(t) \rightarrow u_* \text{ fortement dans } L^2(\mathbb{R}^3 \setminus B(0, R))$$

quand  $t \rightarrow T^-$ .

(ii) La mesure d'explosion  $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^3)$  est égale à

$$\mu = M\delta_{x=0} + |u_*|^2,$$

avec  $M = (M[u_0] - M[u_*]) \geq \lambda_c$ .

De plus, si  $x u_0(|x|) \in H^{1/2}(\mathbb{R}^3)$  alors (i) peut être remplacé par :

(i') Pour toute fonction  $\chi \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$  telle que  $0 \leq \chi \leq 1$  et  $\text{supp } \chi \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ , on a  $\chi u(t) \rightarrow \chi u_*$  faiblement dans  $H^{1/2}(\mathbb{R}^3)$  quand  $t \rightarrow T^-$ , et

$$\chi u(t) \rightarrow \chi u_* \text{ fortement dans } H^s(\mathbb{R}^3) \text{ pour } 0 \leq s < 1/2$$

quand  $t \rightarrow T^-$ .

Le théorème précédent signifie que lorsque  $u_0$  est radiale, l'étoile ne peut s'effondrer qu'en l'origine (donc il ne peut jamais y avoir concentration de la masse sur une sphère, par exemple) et  $u(t)$  converge fortement vers  $u_*$  en dehors de l'origine.

Les théorèmes 4 et 5 fournissent des premières informations sur les solutions qui s'effondrent en temps fini. Il serait intéressant d'en savoir plus, par exemple concernant l'existence ou non d'un profil spécial aux points d'explosion.

## 2.2 Éléments de preuve

Dans cette section, nous donnons les éléments de preuve principaux pour la démonstration des théorèmes 4 et 5. Le lecteur trouvera tous les détails dans [25].

(i) **Existence d'une limite faible pour  $u(t)$**

L'existence de la limite  $u_*$  suit principalement du fait que le terme non linéaire dans (1) est une convolution, et de la conservation de la masse totale. En effet, en utilisant l'équation (1), on trouve que

$$\begin{aligned} \|\partial_t u(t)\|_{H^{-1}(\mathbb{R}^3)} &= \left\| (-\Delta + m^2)^{-1/2} \partial_t u(t) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \\ &\leq \|u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \left\| (-\Delta + m^2)^{-1/2} |x|^{-1} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^3) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^3)} \|u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^3. \end{aligned} \tag{13}$$

À la dernière ligne, nous avons utilisé l'inégalité triangulaire comme suit :

$$\begin{aligned} & \left\| \int_{\mathbb{R}^3} dy |u(y)|^2 (-\Delta_x + m^2)^{-1/2} \frac{1}{|x-y|} u(x) \right\|_{L_x^2(\mathbb{R}^3)} \\ & \leq \int_{\mathbb{R}^3} dy |u(y)|^2 \left\| (-\Delta_x + m^2)^{-1/2} \frac{1}{|x-y|} \right\|_{L_x^2(\mathbb{R}^3) \rightarrow L_x^2(\mathbb{R}^3)} \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}. \end{aligned}$$

La norme d'opérateur de  $(-\Delta_x + m^2)^{-1/2}|x-y|^{-1}$  est indépendante de  $y$ , à cause de l'invariance par translation. Cette norme est bornée par 2, d'après l'inégalité de Hardy

$$|x|^{-2} \leq 4(-\Delta) \leq 4(-\Delta + m^2).$$

Ainsi, en revenant à (13) et en utilisant la conservation de la norme  $L^2$ , on obtient l'estimée

$$\sup_{[0,T]} \|\partial_t u(t)\|_{H^{-1}(\mathbb{R}^3)} \leq \|u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} + 2 \|u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^3 = \|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} + 2 \|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^3.$$

Comme on a à la fois  $u \in L^\infty((0,T), L^2(\mathbb{R}^3))$  et  $\partial_t u \in L^\infty((0,T), H^{-1}(\mathbb{R}^3))$ , on déduit par un théorème classique d'interpolation [29], que  $u \in C^0([0,T], H^{-1/2}(\mathbb{R}^3))$ , comme annoncé dans le point (i) du théorème 4.

Le résultat précédent s'étend facilement à une non linéarité sous la forme  $V * |u|^2 u$ , avec un potentiel d'interaction  $V$  tel que  $(-\Delta + m^2)^{-1/2} V$  est un opérateur borné sur  $L^2(\mathbb{R}^3)$ .

**(ii) Existence d'une limite étroite pour  $|u(t)|^2$**

Pour montrer l'existence d'une limite étroite pour  $|u(t)|^2$ , on utilise cette fois la forme spécifique de l'énergie cinétique, et en particulier le fait que la masse ne peut se propager qu'à vitesse finie. On remarque que, pour toute fonction suffisamment lisse  $\chi$ , on a

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^3} \chi(x) |u(t,x)|^2 dx = i \left\langle u(t), [\sqrt{-\Delta + m^2}, \chi] u(t) \right\rangle_{L^2(\mathbb{R}^3)}.$$

En utilisant maintenant une estimée due à Calderón [4, 11, 39]

$$\left\| [\sqrt{-\Delta + m^2}, \chi] \right\|_{L^2(\mathbb{R}^3) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^3)} \leq C \|\nabla \chi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}. \quad (14)$$

on déduit que les variations de  $t \mapsto \int_{\mathbb{R}^3} \chi |u(t)|^2$  sont bornées dès que  $\nabla \chi \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$ , et donc que la limite

$$\lim_{t \rightarrow T^-} \int_{\mathbb{R}^3} \chi(x) |u(t,x)|^2 dx$$

existe pour toute fonction  $\chi$  dans  $W^{1,\infty}(\mathbb{R}^3)$ . Il est ensuite relativement aisé de vérifier que  $|u(t)|^2$  est tendue et converge étroitement vers une mesure  $\mu$ .

L'argument précédent peut être généralisé au cas où  $\sqrt{-\Delta + m^2}$  est remplacé par un opérateur pseudo-différentiel d'ordre un quelconque, satisfaisant une inégalité similaire à (14).

**(iii) Existence d'un point de concentration**

Pour montrer qu'il existe au moins un point  $x_*$  tel que  $\mu(\{x_*\}) \geq \lambda_c$ , nous avons utilisé dans [25] des arguments semblables à ceux qui ont déjà été employés pour l'équation de Schrödinger non linéaire [34, 36, 41, 21], et qui sont principalement

basés sur la méthode de concentration-compacité [30, 31] (qu'il a fallu adapter au cadre des espaces de Sobolev fractionnaires).

La première étape consiste à dilater la solution d'un facteur  $s(t)$ , de sorte à normaliser son énergie cinétique, tout en conservant la masse totale. On pose donc

$$v(t, x) = s(t)^{3/2} u(t, s(t)x), \quad \text{avec} \quad s(t) = \frac{1}{\langle u(t), \sqrt{-\Delta} u(t) \rangle} \xrightarrow{t \rightarrow T^-} 0.$$

On remarque ensuite que l'énergie  $\mathcal{E}_0[v(t)]$  tend vers 0 puisque l'on a

$$0 \geq \mathcal{E}_0[v(t)] = s(t) \mathcal{E}_0[u(t)] \geq s(t) \left( \mathcal{E}_m[u_0] - m \int_{\mathbb{R}^3} |u_0|^2 \right).$$

Comme l'énergie cinétique de  $v(t)$  a été normalisée, on obtient en particulier que l'interaction gravitationnelle tend vers 2 :

$$\lim_{t \rightarrow T^-} \iint \frac{|v(t, x)|^2 |v(t, y)|^2}{|x - y|} dx dy = 2. \quad (15)$$

Pour la fonction dilatée  $v(t)$ , il est naturel de considérer le problème sans masse,  $m = 0$ , car cette dernière disparaît en appliquant la dilatation de facteur  $s(t)$ .

Dans une seconde étape, on choisit une suite quelconque de temps  $t_n \rightarrow T^-$ , et on décompose la suite  $v(t_n)$  bornée dans  $H^{1/2}(\mathbb{R}^3)$  en bulles de la façon suivante

$$v(t_n) = \sum_{j=1}^J v_j(\cdot - x_n^j) + r_n^{J+1},$$

à une sous-suite près. Les translations  $x_n^j$  sont telles que  $|x_n^j - x_n^{j'}| \rightarrow \infty$  pour tous  $1 \leq j \neq j' \leq J$ , et le reste  $r_n^{J+1}$  est petit dans les normes sous-critiques

$$\forall 2 < p < 3, \quad \lim_{J \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} \|r_n^{J+1}\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} = 0.$$

À cause de (15), on peut voir qu'au moins un des  $v_j$  n'est pas nul. De plus, l'énergie se découple au sens où

$$\mathcal{E}_0(v(t_n)) = \sum_{j=1}^J \mathcal{E}_0(v_j) + \varepsilon_n^{J+1}$$

avec

$$\lim_{J \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} |\varepsilon_n^{J+1}| = 0.$$

Pour les détails techniques concernant cette décomposition de  $v(t_n)$ , nous renvoyons à [25].

Comme on sait d'après le lemme 1 que  $\mathcal{E}_0(v_j) > 0$  chaque fois que  $\int_{\mathbb{R}^3} |v_j|^2 < \lambda_c$ , on déduit aisément de ces propriétés qu'au moins l'un des  $v_j$  doit vérifier  $\int_{\mathbb{R}^3} |v_j|^2 \geq \lambda_c$ . En effectuant la dilatation à l'envers et en réinterprétant cette information pour la suite initiale  $u(t)$ , on se rend compte que cela signifie qu'une masse au moins égale à  $\lambda_c$  doit se concentrer autour d'un point  $x(t_n)$ . La convergence de  $x(t_n)$  vers un point  $x_*$  suit alors de la convergence étroite de  $|u(t)|^2$ .

#### (iv) Cas radial

Nous expliquons maintenant rapidement comment démontrer le théorème 5 concernant les solutions radiales. Soit  $\chi$  une fonction de localisation à symétrie

radiale, suffisamment régulière. On commence par écrire l'équation satisfaite par  $\chi u(t)$  sous la forme

$$i\partial_t(\chi u) = \sqrt{-\Delta + m^2}(\chi u) + b(t), \quad (16)$$

avec

$$b(t) = -(|x|^{-1} * |u(t)|^2)\chi u(t) + [\chi, \sqrt{-\Delta + m^2}]u(t).$$

Si on peut choisir  $\chi$  de sorte à garantir que  $b(t)$  soit borné uniformément dans  $L^2(\mathbb{R}^3)$ , il suit alors de la formule de Duhamel que  $\chi u(t) \rightarrow \chi u_*$  fortement dans  $L^2(\mathbb{R}^3)$ . Comme le commutateur  $[\chi, \sqrt{-\Delta + m^2}]$  est borné dès que  $\nabla\chi \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$ , d'après l'estimée (14) de Calderón, il faut choisir la fonction de localisation  $\chi$  telle que  $(|x|^{-1} * |u(t)|^2)\chi u(t)$  soit uniformément bornée dans  $L^2(\mathbb{R}^3)$ .

En toute généralité, il n'est pas évident que localiser en dehors des points de concentration de la mesure  $\mu$  suffise à rendre  $(|x|^{-1} * |u(t)|^2)\chi u(t)$  bornée dans  $L^2(\mathbb{R}^3)$ . Par contre, ceci est vrai dans le cas radial, comme nous l'expliquons maintenant.

Si on suppose que  $u_0$  est radiale, on peut facilement vérifier que  $u(t)$  reste radiale pour tout  $t \in [0, T)$  et on peut alors utiliser le théorème de Newton comme suit :

$$\forall |x| \geq \varepsilon, \quad \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|u(t, y)|^2}{|x - y|} dy = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|u(t, y)|^2}{\max(|x|, |y|)} dy \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_{\mathbb{R}^3} |u(t)|^2 = \frac{1}{\varepsilon} \int_{\mathbb{R}^3} |u_0|^2.$$

On déduit donc que pour tout  $\chi \in W^{1, \infty}(\mathbb{R}^3)$  avec  $\text{supp}(\chi) \subset B(0, \varepsilon)$ , on a  $\chi u(t) \rightarrow \chi u_*$  fortement dans  $L^2(\mathbb{R}^3)$ . Ceci montre bien que le point de concentration de la mesure limite  $\mu$  ne peut être qu'en 0, et qu'on a convergence forte dans  $L^2$  en dehors de ce point.

Il est possible d'améliorer cette convergence en dehors de 0 dans les espaces de Sobolev fractionnaires  $H^s$  avec  $0 \leq s < 1/2$ , comme énoncé en (i'). L'argument consiste à utiliser l'estimée du Viriel de [17], qui montre que  $xu(t) \rightharpoonup xu_*$  faiblement dans  $H^{1/2}(\mathbb{R}^3)$ . Nous renvoyons à [25] pour plus de détails.

Ceci termine notre rapide présentation de la preuve des théorèmes 4 et 5.

### 3 Autres modèles : étoiles fermioniques

Comme nous l'avons mentionné en introduction, les étoiles qui intéressent le plus les physiciens sont composées de fermions, et non de bosons. Nous présentons ici rapidement deux modèles fermioniques, qui ont particulièrement attiré notre attention dans une collaboration récente avec Hainzl, Lenzmann et Schlein [18].

#### 3.1 Modèle Hartree-Fock

Le premier modèle que nous allons présenter est appelé *Hartree-Fock* et c'est sans doute l'une des théories quantiques non linéaires les plus simples pour les systèmes de fermions. Pour une présentation générale de ce modèle (dans le cadre des atomes et molécules), nous renvoyons par exemple à [26, 32, 5].

Dans le modèle de Hartree étudié aux sections précédentes, les bosons composant l'étoile étaient tous dans le même état quantique  $\varphi = u \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{-1}$  (voir la section 1.5). Ceci est impossible pour des fermions, à cause du principe de Pauli qui précise justement que deux fermions identiques ne peuvent être dans le même état.

Dans le modèle Hartree-Fock (HF), l'état des  $N$  fermions (supposés sans spin pour simplifier) de l'étoile est représenté par un *opérateur autoadjoint compact*  $\gamma$ , agissant sur  $L^2(\mathbb{R}^3)$ , soumis aux contraintes

$$0 \leq \gamma \leq 1 \quad \text{et} \quad \text{Tr}(\gamma) = N. \quad (17)$$

	BOSONS	FERMIONS
modèle de champ moyen	Hartree	Hartree-Fock
état décrit par	une fonction $u \in L^2(\mathbb{R}^3)$	un opérateur $0 \leq \gamma \leq 1$
nombre de particules	$\int_{\mathbb{R}^3}  u ^2 = N$	$\text{Tr}(\gamma) = N$
équation	$i \partial_t u = H_u u$	$i \partial_t \gamma = [H_\gamma, \gamma]$
opérateur de champ moyen	$H_u = T - \kappa  x ^{-1} *  u ^2$	$H_\gamma = T - \kappa  x ^{-1} * \rho_\gamma + \kappa X_\gamma$ avec $\rho_\gamma(x) = \gamma(x, x)$ et $X_\gamma(x, y) = \gamma(x, y)  x - y ^{-1}$

TABLE 1 – Comparaison entre les modèles de Hartree (bosons) et Hartree-Fock (fermions). L'énergie cinétique est  $T = \sqrt{-\Delta + m^2}$ .

L'inégalité  $0 \leq \gamma \leq 1$  est à interpréter au sens des opérateurs (1 est l'identité sur  $L^2(\mathbb{R}^3)$ ). Comme  $\gamma$  est supposé compact, on peut le diagonaliser<sup>2</sup> dans une base orthonormée  $\{\varphi_i\}$  de  $L^2(\mathbb{R}^3)$  :

$$\gamma = \sum_{i=1}^{\infty} n_i |\varphi_i\rangle\langle\varphi_i|, \quad \text{avec } 0 \leq n_i \leq 1 \text{ et } n_i \rightarrow 0. \quad (18)$$

Sa trace est alors simplement égale à  $\text{Tr}(\gamma) = \sum_i n_i$ . De façon équivalente, on peut définir  $\text{Tr}(\gamma) = \sum_j \langle\psi_j, \gamma\psi_j\rangle$  pour toute base orthonormée quelconque  $\{\psi_j\}$  de  $L^2(\mathbb{R}^3)$ .

L'exemple typique que l'on doit toujours avoir en tête est celui des *états Hartree-Fock purs* qui sont des projecteurs orthogonaux de rang  $N$  :

$$\gamma = \sum_{i=1}^N |\varphi_i\rangle\langle\varphi_i|, \quad \langle\varphi_i, \varphi_j\rangle = \delta_{ij}, \quad (19)$$

c'est-à-dire les opérateurs  $\gamma$  dont les valeurs propres sont  $n_1 = \dots = n_N = 1$  et  $n_i = 0$  pour  $i \geq N + 1$ . Dans ce cas, les fonctions  $\varphi_1, \dots, \varphi_N$  représentent l'état de chacun des  $N$  fermions composant le système. Dans le cas général, on peut toujours voir  $\gamma$  comme une combinaison convexe d'états purs, ce qui traduit une dispersion statistique pouvant par exemple être due à la présence d'une température dans le système. La contrainte  $0 \leq \gamma \leq 1$  qui empêche  $\gamma$  d'avoir des états propres remplis par plus d'une particule à la fois, est la formulation rigoureuse du principe de Pauli. Pour la suite il est utile de noter que l'opérateur  $\gamma$  possède un noyau intégral qui peut s'écrire, en utilisant la décomposition spectrale (18),  $\gamma(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} n_i \varphi_i(x) \overline{\varphi_i(y)}$ .

Pour des fermions pseudo-relativistes soumis uniquement à une interaction gravitationnelle, l'équation décrivant l'évolution du système s'écrit

$$\begin{cases} i \partial_t \gamma &= [H_\gamma, \gamma], \\ H_\gamma &= \sqrt{-\Delta + m^2} - \kappa |x|^{-1} * \rho_\gamma + \kappa X_\gamma, \\ \gamma(0) &= \gamma_0. \end{cases} \quad (20)$$

Ici  $\rho_\gamma$  est la *densité totale du système* qui, pour  $\gamma = \sum_{i=1}^{\infty} n_i |\varphi_i\rangle\langle\varphi_i|$  un opérateur diagonalisé dans une base orthonormée, est définie par

$$\rho_\gamma(x) = \sum_{i=1}^{\infty} n_i |\varphi_i(x)|^2,$$

<sup>2</sup>. Nous utilisons la notation physique très pratique  $|\varphi\rangle\langle\psi|$  pour l'opérateur  $f \in L^2(\mathbb{R}^3) \mapsto \langle\psi, f\rangle\varphi$ .

une expression qui coïncide (au moins formellement) avec  $\gamma(x, x)$ . Comme  $\sum_i n_i = N$ , on a  $0 \leq \rho_\gamma \in L^1(\mathbb{R}^3)$  et  $\int_{\mathbb{R}^3} \rho_\gamma = N$ . L'opérateur  $X_\gamma$  est appelé *terme d'échange* et il peut être défini par son noyau intégral :

$$X_\gamma(x, y) := \frac{\gamma(x, y)}{|x - y|}.$$

C'est un terme purement quantique qui n'a pas d'équivalent classique. À cause de la contrainte  $0 \leq \gamma \leq 1$ , on ne peut pas choisir un système d'unités tel que  $\kappa = 1$  et on garde donc  $\kappa$  comme variable du modèle.

Considérons un état initial  $0 \leq \gamma_0 \leq 1$  tel que

$$\text{Tr}(\gamma_0) < \infty \quad \text{et} \quad \text{Tr}(\sqrt{-\Delta + m^2} \gamma_0) < \infty. \quad (21)$$

L'énergie cinétique totale du système est définie au sens des formes quadratiques comme suit :

$$\text{Tr}(\sqrt{-\Delta + m^2} \gamma) := \sum_{i=1}^{\infty} n_i \left\| (-\Delta + m^2)^{1/4} \varphi_i \right\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \quad \text{pour} \quad \gamma = \sum_{i=1}^{\infty} n_i |\varphi_i\rangle \langle \varphi_i|. \quad (22)$$

L'existence d'une solution maximale pour l'équation (20), définie sur  $[0, T)$ , pour tout  $\gamma_0$  satisfaisant l'hypothèse (21), peut être obtenue en combinant les méthodes introduites par Chadam et Glassey [8, 7] pour le modèle Hartree-Fock non-relativiste, et par Lenzmann [23] pour l'équation (1). La solution maximale est une famille d'opérateurs  $[0, T) \mapsto \gamma(t)$  telle que  $t \mapsto (-\Delta + m^2)^{1/4} \gamma(t) (-\Delta + m^2)^{1/4}$  et  $t \mapsto (-\Delta + m^2)^{-1/4} \partial_t \gamma(t) (-\Delta + m^2)^{-1/4}$  sont continues pour la norme de trace. Voir par exemple [18] pour plus de détails.

En utilisant l'inégalité de Kato (3), on vérifie aisément que  $H_{\gamma(t)}$  est une famille d'opérateurs autoadjoints sur  $H^1(\mathbb{R}^3)$ , continue au sens de la résolvante. On peut lui associer une unique famille d'unitaires  $U(t, 0)$  telle que

$$\begin{cases} i \partial_t U(t, 0) = H_{\gamma(t)} U(t, 0) & \text{pour } 0 < t < T \\ U(0, 0) = 1, \end{cases}$$

et on a alors

$$\gamma(t) = U(t, 0) \gamma_0 U(t, 0)^*.$$

Comme avant, nous avons utilisé la notation 1 pour l'identité de  $L^2(\mathbb{R}^3)$ . En particulier, on voit que  $\gamma(t)$  est unitairement équivalent à l'état initial  $\gamma_0$  pour tout temps  $t \in [0, T)$ , et donc que le nombre total de particules dans le système est conservé :

$$\text{Tr}(\gamma(t)) := \text{Tr}(\gamma_0).$$

De façon plus précise, si on choisit un état initial diagonalisé sous la forme

$$\gamma_0 = \sum_{i=1}^{\infty} n_i |\varphi_i\rangle \langle \varphi_i|,$$

avec  $0 \leq n_i \leq 1$  et  $\sum_{i=1}^{\infty} n_i (1 + \|(-\Delta)^{1/4} \varphi_i\|_{L^2}^2) < \infty$ , alors on aura

$$\gamma(t) = \sum_{i=1}^{\infty} n_i |\varphi_i(t)\rangle \langle \varphi_i(t)|, \quad \text{avec} \quad \varphi_i(t) = U(t, 0) \varphi_i.$$

Si  $\gamma_0$  est un projecteur orthogonal de rang  $N$ , l'équation (20) est en fait juste un système de  $N$  équations aux dérivées partielles non linéaires couplées.

L'énergie du système est encore une quantité conservée, définie comme suit :

$$\mathcal{E}_{m,\kappa}^{\text{HF}}[\gamma] := \text{Tr}(\sqrt{-\Delta + m^2} \gamma) - \frac{\kappa}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|\rho_\gamma(x)|^2 |\rho_\gamma(y)|^2 - |\gamma(x,y)|^2}{|x-y|} dx dy. \quad (23)$$

On peut introduire, comme dans le cas bosonique, le problème de minimisation

$$E_{m,\kappa}^{\text{HF}}(\lambda) := \inf_{\substack{0 \leq \gamma \leq 1, \text{Tr}(\gamma) = \lambda, \\ \text{Tr}(\sqrt{-\Delta + m^2} \gamma) < \infty}} \mathcal{E}_{m,\kappa}^{\text{HF}}[\gamma]. \quad (24)$$

Comme au lemme 1, on peut alors montrer qu'il existe un  $\lambda_c^{\text{HF}}(\kappa)$ , indépendant de la masse  $m$ , tel que  $E_{m,\kappa}^{\text{HF}}(\lambda) \geq 0$  pour  $\lambda \leq \lambda_c^{\text{HF}}(\kappa)$  et  $E_{m,\kappa}^{\text{HF}}(\lambda) = -\infty$  pour  $\lambda > \lambda_c^{\text{HF}}(\kappa)$ . En suivant Lieb et Yau [28], avec Lenzmann nous avons même pu prouver dans [24] que

$$\lambda_c^{\text{HF}}(\kappa) \underset{\kappa \rightarrow 0^+}{\sim} \left( \frac{\tau_c}{\kappa} \right)^{3/2}$$

où  $\tau_c \simeq 2,677$  est la célèbre constante calculée par Chandrasekhar [10, 9]. Ceci permet de considérer des systèmes avec un nombre de particules  $\lambda$  très grand, à condition de prendre  $\kappa$  très petit, de sorte que  $\lambda^{2/3} \kappa < \tau_c$ .

L'existence de minimiseurs pour  $\lambda < \lambda_c^{\text{HF}}(\kappa)$  et  $m > 0$ , ainsi que la compacité des suites minimisantes à translations près, sont toutes deux prouvées dans [24]. Comme pour l'équation (1), les solutions de l'équation d'évolution (20) à masse sous-critique, c'est-à-dire telles que  $\text{Tr}(\gamma_0) < \lambda_c^{\text{HF}}$ , sont définies pour tout  $t \in \mathbb{R}^+$ .

En ce qui concerne l'existence de solutions qui s'effondrent en temps fini, le théorème suivant est le résultat principal de [18].

**Théorème 6 (Existence de solutions s'effondrant en temps fini [19, 18])**

Soient  $\kappa > 0$ ,  $m \geq 0$  et  $0 \leq \gamma_0 \leq 1$  un opérateur à symétrie radiale, c'est-à-dire tel que  $\mathcal{R}\gamma_0 = \gamma_0\mathcal{R}$  pour toute rotation  $\mathcal{R} \in SO(3)$ . On suppose que

$$\text{Tr} |x|^4 \gamma_0 + \text{Tr} (-\Delta) \gamma_0 + \text{Tr} |L|^2 \gamma_0 < \infty$$

où  $L = -ix \wedge \nabla_x$  désigne l'opérateur de moment angulaire. Si

$$\mathcal{E}_{m,\kappa}^{\text{HF}}[\gamma_0] < 0,$$

ce qui implique  $\text{Tr}(\gamma_0) \geq \lambda_c^{\text{HF}}(\kappa)$ , alors l'unique solution maximale  $\gamma(t)$  de condition initiale  $\gamma_0$  s'effondre en temps fini : on a  $T < \infty$  et

$$\lim_{t \rightarrow T^-} \text{Tr}(\sqrt{-\Delta} \gamma(t)) = +\infty.$$

La preuve repose à nouveau sur l'argument de Viriel de Fröhlich et Lenzmann [17], mais elle utilise en plus la conservation du moment angulaire

$$\text{Tr}(|L|^2 \gamma(t)) = \text{Tr}(|L|^2 \gamma_0)$$

pour contrôler le terme d'échange  $X_\gamma$ . Cette idée a été introduite par Hainzl et Schlein dans [19] pour des opérateurs  $\gamma_0$  de rang fini, et elle a été généralisée au cas d'opérateurs  $\gamma_0$  quelconques dans [18].

Le lecteur pourra retenir que, même si des difficultés techniques non négligeables apparaissent lorsqu'on doit contrôler le terme d'échange  $X_\gamma$  qui est un opérateur non local, la plupart des résultats connus pour l'équation bosonique (1) peuvent être étendus au modèle Hartree-Fock (20). En particulier, il est possible de décrire la formation de singularités au temps d'explosion  $T$ , exactement comme aux théorèmes 4 et 5. Cependant, plutôt que de donner un énoncé précis de ces résultats (que le lecteur pourra certainement écrire seul), nous présentons à la section suivante un autre modèle fermionique important, pour lequel beaucoup de questions élémentaires sont à ce jour encore ouvertes.

### 3.2 Modèle Hartree-Fock-Bogoliubov

Les étoiles à neutrons et les naines blanches (dont la masse n'est pas trop grande) sont des systèmes stables et il est important de pouvoir décrire plus précisément leur comportement physique. Comme tout système quantique attractif, ces étoiles peuvent être dans un état superfluide, en particulier en leur centre où la matière est très dense.

La superfluidité est un phénomène quantique, visible à l'échelle macroscopique, et qui se traduit par la possibilité d'un écoulement en l'absence totale de viscosité. Il est généralement typique des systèmes de bosons à basse température, et est en partie dû à l'existence d'un état quantique commun dans lequel tous les bosons se placent (on parle de condensation de Bose-Einstein). Les systèmes fermioniques peuvent connaître des phénomènes similaires, mais il faut d'abord que, grâce à l'attraction, les particules puissent se placer deux par deux (*paires de Cooper*) et que ces paires se comportent ensuite comme des bosons. Les électrons d'un métal (qui peuvent s'attirer grâce aux déformations du cristal ambiant) subissent un mécanisme similaire donnant lieu à la supraconductivité [2, 3]. Des phénomènes du même type sont rencontrés en physique nucléaire [38].

Le modèle de Hartree-Fock-Bogoliubov (HFB) généralise la théorie Hartree-Fock en permettant la formation et la description de paires de Cooper au sein du système. Il a été bien moins étudié mathématiquement que le célèbre modèle Hartree-Fock. Dans [1], Bach, Lieb et Solovej ont proprement défini ce modèle, alors que les systèmes gravitationnels ont été étudiés plus précisément dans [24, 18]. Nous ne donnerons dans cette dernière section qu'un avant goût de cette théorie et renvoyons à [24, 18] pour plus de détails.

L'état du système est maintenant décrit par l'opérateur autoadjoint  $\gamma$  de la théorie Hartree-Fock et, en plus, par une fonction d'onde à deux corps  $\alpha \in L^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$  décrivant les paires de Cooper. Les deux objets sont reliés par une contrainte matricielle sous la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} \gamma & \alpha \\ \alpha^* & 1 - \bar{\gamma} \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{dans } L^2(\mathbb{R}^3) \oplus L^2(\mathbb{R}^3) \quad (25)$$

où nous avons utilisé la même notation  $\alpha$  pour désigner l'opérateur dont le noyau intégral est  $\alpha(x, y)$ . L'opérateur  $\bar{\gamma}$  est le complexe conjugué de l'opérateur  $\gamma$ , c'est-à-dire celui dont le noyau est  $\bar{\gamma}(x, y)$ . La contrainte (25) implique comme avant que  $0 \leq \gamma \leq 1$ . Elle implique également l'inégalité plus précise  $\alpha\alpha^* \leq \gamma - \gamma^2$ , qui permet de majorer le nombre moyen de paires de Cooper par une quantité qui, essentiellement, mesure la distance de l'opérateur  $\gamma$  aux projecteurs orthogonaux :

$$\iint_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} |\alpha(x, y)|^2 dx dy \leq \text{Tr } \gamma(1 - \gamma).$$

Ceci démontre en particulier que pour un état HF pur ( $\gamma = \gamma^2$ ), il ne peut y avoir de paires de Cooper :  $\alpha \equiv 0$ .

L'équation décrivant l'évolution du système est la suivante :

$$\begin{cases} i \frac{d}{dt} \Gamma = [F_{\Gamma(t)}, \Gamma(t)] \\ \Gamma(0) = \Gamma_0, \end{cases} \quad (26)$$

où nous avons utilisé les notations

$$\Gamma := \begin{pmatrix} \gamma & \alpha \\ \alpha^* & 1 - \bar{\gamma} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad F_{\Gamma} := \begin{pmatrix} H_{\gamma} & -\kappa X_{\alpha} \\ -\kappa(X_{\alpha})^* & -\bar{H}_{\gamma} \end{pmatrix}.$$

La preuve de l'existence de solutions maximales est similaire au cas de Hartree-Fock. En fait, si au temps  $t = 0$  il n'y a aucune paire de Cooper,  $\alpha_0 \equiv 0$ , alors

la solution vérifie  $\alpha(t) \equiv 0$  pour tout  $t \in [0, T]$  et  $\gamma(t)$  coïncide avec la solution de l'équation Hartree-Fock (20). Les solutions HF de l'équation (20) sont donc des solutions particulières du système HFB (26).

L'énergie totale du système est encore une fois conservée au cours du temps

$$\mathcal{E}_{m,\kappa}^{\text{HFB}}(\gamma, \alpha) := \text{Tr}(\sqrt{-\Delta + m^2} \gamma) - \frac{\kappa}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|\rho_\gamma(x)|^2 |\rho_\gamma(y)|^2 - |\gamma(x, y)|^2 + |\alpha(x, y)|^2}{|x - y|} dx dy.$$

Comme pour le modèle Hartree-Fock, il existe un nombre critique de particules  $\lambda_c^{\text{HFB}}(\kappa)$ , indépendant de  $m$ , au-delà duquel les solutions peuvent exploser en temps fini, et en dessous duquel les solutions sont toutes globales. On a par ailleurs [24]

$$\lambda_c^{\text{HFB}}(\kappa) \underset{\kappa \rightarrow 0^+}{\sim} \lambda_c^{\text{HF}}(\kappa)$$

qui montre que les paires de Cooper ne modifient pas, au premier ordre, la valeur de la masse critique des étoiles fermioniques dans la limite où  $\kappa$  est assez petit.

L'énergie possède des minimiseurs sous la contrainte que  $\text{Tr}(\gamma) = \lambda < \lambda_c^{\text{HFB}}(\kappa)$ , mais la preuve de leur existence ainsi que celle de la compacité de toutes les suites minimisantes est bien plus difficile que pour les modèles autres modèles que nous avons présentés dans cet exposé [24]. Le terme dépendant de  $\alpha$  dans l'énergie est critique vis-à-vis du terme cinétique et il est très difficile à contrôler.

Cette difficulté se retrouve lorsqu'on étudie l'existence de solutions à masse surcritique s'effondrant en temps fini. Dans [18], nous avons expliqué qu'une borne uniforme sur une puissance suffisamment grande du moment angulaire du système,

$$\text{Tr}(1 + |L|^\tau) \gamma(t) \leq C,$$

permettrait de contrôler le terme d'appariement, et donc de montrer que les solutions radiales d'énergie négative s'effondrent en temps fini, comme pour le cas HF (théorème 6). Malheureusement le moment angulaire *n'est pas* une quantité conservée dans le modèle HFB [18], contrairement au modèle HF, ce qui a jusqu'à présent empêché tout résultat dans ce sens. Même si d'un point de vue physique il semble peu probable que les paires de Cooper permettent au moment angulaire de considérablement augmenter avec le temps, une compréhension mathématique plus fine du modèle Hartree-Fock-Bogoliubov est encore manquante.

## Références

- [1] V. BACH, E. H. LIEB, AND J. P. SOLOVEJ, *Generalized Hartree-Fock theory and the Hubbard model*, J. Statist. Phys., 76 (1994), pp. 3–89.
- [2] J. BARDEEN, L. N. COOPER, AND J. R. SCHRIEFFER, *Theory of superconductivity*, Phys. Rev., 108 (1957), pp. 1175–1204.
- [3] N. N. BOGOLIUBOV, *On a New Method in the Theory of Superconductivity*, J. Exp. Theor. Phys., 34 (1958), p. 58.
- [4] A.-P. CALDERÓN, *Commutators of singular integral operators*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 53 (1965), pp. 1092–1099.
- [5] É. CANCÈS, C. LE BRIS, AND Y. MADAY, *Méthodes mathématiques en chimie quantique. Une introduction*, vol. 53 of Collection Mathématiques et Applications, Springer, 2006.
- [6] T. CAZENAVE AND P.-L. LIONS, *Orbital stability of standing waves for some nonlinear Schrödinger equations*, Commun. Math. Phys., 85 (1982), pp. 549–561.

- [7] J. M. CHADAM, *The time-dependent Hartree-Fock equations with Coulomb two-body interaction*, Commun. Math. Phys., 46 (1976), pp. 99–104.
- [8] J. M. CHADAM AND R. T. GLASSEY, *Global existence of solutions to the Cauchy problem for time-dependent Hartree equations*, J. Math. Phys., 16 (1975), pp. 1122–1130.
- [9] S. CHANDRASEKHAR, *The density of white dwarf stars*, Philos. Mag., 11 (1931), pp. 592–596.
- [10] ———, *The maximum mass of ideal white dwarfs*, Astrophys. J., 74 (1931), pp. 81–82.
- [11] R. R. COIFMAN AND Y. MEYER, *On commutators of singular integrals and bilinear singular integrals*, Trans. Amer. Math. Soc., 212 (1975), pp. 315–331.
- [12] A. ELGART AND B. SCHLEIN, *Mean field dynamics of boson stars*, Comm. Pure Appl. Math., 60 (2007), pp. 500–545.
- [13] M. J. ESTEBAN, M. LEWIN, AND É. SÉRÉ, *Variational methods in relativistic quantum mechanics*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.), 45 (2008), pp. 535–593.
- [14] R. L. FRANK AND E. LENZMANN, *On ground states for the  $L^2$ -critical boson star equation*, ArXiv e-prints, (2010).
- [15] J. FRÖHLICH, B. L. G. JONSSON, AND E. LENZMANN, *Effective dynamics for boson stars*, Nonlinearity, 20 (2007), pp. 1031–1075.
- [16] J. FRÖHLICH AND E. LENZMANN, *Blowup for nonlinear wave equations describing boson stars*, Comm. Pure Appl. Math., 60 (2007), pp. 1691–1705.
- [17] ———, *Dynamical collapse of white dwarfs in Hartree- and Hartree-Fock theory*, Commun. Math. Phys., 274 (2007), pp. 737–750.
- [18] C. HAINZL, E. LENZMANN, M. LEWIN, AND B. SCHLEIN, *On blowup for time-dependent generalized Hartree-Fock equations*, Ann. Henri Poincaré, 11 (2010), pp. 1023–1052.
- [19] C. HAINZL AND B. SCHLEIN, *Stellar collapse in the time dependent Hartree-Fock approximation*, Commun. Math. Phys., 287 (2009), pp. 705–717.
- [20] I. W. HERBST, *Spectral theory of the operator  $(p^2 + m^2)^{1/2} - Ze^2/r$* , Commun. Math. Phys., 53 (1977), pp. 285–294.
- [21] T. HMIDI AND S. KERAANI, *Blowup theory for the critical nonlinear Schrödinger equations revisited*, Int. Math. Res. Not., (2005), pp. 2815–2828.
- [22] T. KATO, *Perturbation theory for linear operators*, Springer, second ed., 1995.
- [23] E. LENZMANN, *Well-posedness for semi-relativistic Hartree equations of critical type*, Math. Phys. Anal. Geom., 10 (2007), pp. 43–64.
- [24] E. LENZMANN AND M. LEWIN, *Minimizers for the Hartree-Fock-Bogoliubov theory of neutron stars and white dwarfs*, Duke Math. J., 152 (2010), pp. 257–315.
- [25] E. LENZMANN AND M. LEWIN, *On singularity formation for the  $L^2$ -critical Boson star equation*. 2011.
- [26] E. H. LIEB AND B. SIMON, *The Hartree-Fock theory for Coulomb systems*, Commun. Math. Phys., 53 (1977), pp. 185–194.
- [27] E. H. LIEB AND W. E. THIRRING, *Gravitational collapse in quantum mechanics with relativistic kinetic energy*, Ann. Physics, 155 (1984), pp. 494–512.
- [28] E. H. LIEB AND H.-T. YAU, *The Chandrasekhar theory of stellar collapse as the limit of quantum mechanics*, Commun. Math. Phys., 112 (1987), pp. 147–174.

- [29] J.-L. LIONS, *Espaces intermédiaires entre espaces hilbertiens et applications*, Bull. Math. Soc. Sci. Math. Phys. R. P. Roumaine (N.S.), 2 (50) (1958), pp. 419–432.
- [30] P.-L. LIONS, *The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The locally compact case, Part I*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire, 1 (1984), pp. 109–149.
- [31] ———, *The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The locally compact case, Part II*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire, 1 (1984), pp. 223–283.
- [32] ———, *Solutions of Hartree-Fock equations for Coulomb systems*, Commun. Math. Phys., 109 (1987), pp. 33–97.
- [33] F. MERLE AND P. RAPHAEL, *Profiles and quantization of the blow up mass for critical nonlinear Schrödinger equation*, Comm. Math. Phys., 253 (2005), pp. 675–704.
- [34] F. MERLE AND Y. TSUTSUMI,  *$L^2$  concentration of blow-up solutions for the nonlinear Schrödinger equation with critical power nonlinearity*, J. Differential Equations, 84 (1990), pp. 205–214.
- [35] A. MICHELANGELI AND B. SCHLEIN, *Dynamical Collapse of Boson Stars*, ArXiv e-prints, (2010).
- [36] H. NAWA, *“Mass concentration” phenomenon for the nonlinear Schrödinger equation with the critical power nonlinearity. II*, Kodai Math. J., 13 (1990), pp. 333–348.
- [37] M. REED AND B. SIMON, *Methods of Modern Mathematical Physics. II. Fourier analysis, self-adjointness*, Academic Press, New York, 1975.
- [38] P. RING AND P. SCHUCK, *The nuclear many-body problem*, vol. Texts and Monographs in Physics, Springer Verlag, New York, 1980.
- [39] E. M. STEIN, *Harmonic analysis : real-variable methods, orthogonality, and oscillatory integrals*, vol. 43 of Princeton Mathematical Series, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1993. With the assistance of Timothy S. Murphy.
- [40] W. THIRRING, *Bosonic black holes*, Physics Letters B, 127 (1983), pp. 27 – 29.
- [41] M. I. WEINSTEIN, *On the structure and formation of singularities in solutions to nonlinear dispersive evolution equations*, Comm. Partial Differential Equations, 11 (1986), pp. 545–565.